経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

独占市場におけるリアル・オプション分析*

――解析的アプローチ――

芝　田　隆　志
藤　原　　　哉

I　はじめに

リアル・オプション・アプローチとは，金融におけるオプション商品の評価式を企業のプロジェクト価値に適用する理論である。本論では，Dixit and Pindyck [1994] を基にリアル・オプション評価法を説明し，その理論モデルにおける補完および拡張について考察する。

伝統的な経済学における投資決定理論は，正味現在価値（Net Present Value: NPV）法である。NPV 法とは，プロジェクトによる収益と費用の現在価値の大小関係により意思決定を行う手法である。最近の投資理論の研究では，NPV 法における次の2つの問題点が指摘されている。一つは投資支出が可逆性を満たさない点である。これは投資の不可逆性とよばれる。投資の不可逆性とは，もし企業が投資を実行したならば，その投資費用は回収できないことを意味する。なぜならば，投資は企業特有の資産であり，企業は投資プロジェクトによる資産を他に売却することは困難となるからである。他方，もう一つの問題点とは，投資の意思決定には延期する柔軟性（フレキシビリティ）を有している点である。NPV 法では，企業が投資タイミングを柔軟に対応する点を考慮していない。現実での企業が投資タイミングを考慮する理由とは，投資による将来の収益が不確実性を伴っており，投資の実行はプロジェクトに対する新しい情報を放棄することなので，企業はそうした機会費用を企業は考慮に入れて意思決定しなければならないからである。

以上のように NPV 法で考慮に入れていない点に注目し，企業の投資問題に不確実性を明示的に取り入れた分析手法が，リアル・オプション分析である。

先行研究である Dixit and Pindyck [1994] で得られた主要な命題とは，「不確実性が増大すると企業のプロジェクト価値も増大する」というものである。この命題の成立する理由は，不確実性が増大するならば，企業は将来利得に関する情報を待つ価値が増大するので，企業の投資機会価値が増大するからである。Dixit and Pindyck [1994] では，企業価値の不確実性に関する比較静学は，解析的ではなく数値計算により示されている。本論では，Dixit and Pindyck [1994] モデルで数値計算により示された命題を解析的に証明する。

Dixit and Pyndyck [1994] では，状態変数が対数正規過程に従うと仮定している。本論では，状態変数の対数が平均回帰過程に従うモデルについて考察する。この場合，プロジェクト価値は状態変数に対して必ずしも凸関数になるとは限らない。これは，企業のプロジェクト価値の形状が状態変数の従う確率過程に依存することを意味している。また，状態変数が平均回帰過程に従う場合でも，不確実性が増大するとプロジェクト価値が増大することを数値計算から考察する。

本論の構成は以下の通りである。第II章では Dixit and Pindyck [1994] を概観し，Dixit and Pindyck [1994] が数値計算で示した命題

*　本論の作成にあたっては，京都大学大学院経済学研究科の木島正明教授から御指導して頂いた。この場を借りて謝意を表したい。

を解析的に証明する。第Ⅲ章では，企業の利得を規定する状態変数の従う確率過程が平均回帰過程に従うと仮定して，状態変数の従う確率過程の差異が，どのように企業のプロジェクト価値に影響を与えるかについて考察する。第Ⅳ章では本論で得られた結果について総括する。なお本論における証明は，付録に掲載する。

II　幾何ブラウン運動とリアル・オプション分析

本章では，Dixit and Pindyck [1994] をベースに，独占市場におけるリアル・オプション・モデルを考察する。いま独占市場における企業が投資機会に直面しており，プロジェクトの費用は不可逆的で，その費用水準を $I \in R_{++}$ と表される正の定数と仮定する。他方，プロジェクトの収益は，外生的な状態変数に依存すると仮定する。その状態変数は完備なフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 上の確率過程 $\{V_t\}_{t\geq 0}$ として定義され，次のような幾何ブラウン運動

$$\mathrm{d}V_t = \mu V_t \mathrm{d}t + \sigma V_t \mathrm{d}z_t, \quad V_0 = V\,(\in R_{++}) \qquad (1)$$

に従うと仮定する。ただし期待収益率 $\mu \in R_{++}$ およびボラティリティ $\sigma \in R_{+}$ は確定的な正の定数，$\{z_t\}_{t\geq 0}$ は標準ブラウン運動である。なお，添字 t は時刻を表す。このとき，企業の投資における機会価値 $F(V_t)$ は，

$$F(V) = \sup_{\tau} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-r\tau}(V_\tau - I)] \qquad (2)$$

と表される。ただし $\mathrm{E}[\cdot] := \mathrm{E}[\cdot|\mathfrak{F}_0]$ を時刻 $t=0$ における条件つき期待値，τ をプロジェクト価値を最大化する停止時刻，$r \in R_{++}$ を割引率とする。リアル・オプション分析では，不等式 $0<\mu<r$ が最も重要な仮定である[1)]。その重要性については後の議論で明らかになる。

1　不確実性のない場合のプロジェクト価値

単純化のため，企業が不確実性に直面しない場合を考えよう。すなわち上記の(1)式のボラティリティをゼロ（$\sigma=0$）と仮定する。このとき，企業の収益は $V_\tau = V\mathrm{e}^{\mu\tau}$ となるので，時点0における任意の時点 τ での企業のプロジェクト価値 $F_N(V)$ は，

$$F_N(V) = \mathrm{e}^{-r\tau}(V\mathrm{e}^{\mu\tau} - I) \qquad (3)$$

となる。不等式 $0<\mu<r$ の仮定から，τ が十分に大きいと $V<I$ の場合でも $F(V)>0$ となる。またゼロ時点で $V \geq I$ の場合でも，企業はいま投資するよりも投資を保留する方が，利潤最大化の観点から望ましい場合も考えられる。これが不等式 $0<\mu<r$ を仮定する理由である。いま上記(3)式を最大化すると，

$$\frac{\mathrm{d}F_N(V)}{\mathrm{d}\tau} = -(r-\mu)V\mathrm{e}^{-(r-\mu)\tau} + rI\mathrm{e}^{-r\tau}$$

$$\tau^* = \left\{\frac{1}{\mu}\log\left[\frac{rI}{(r-\mu)V}\right]\right\}_+ \qquad (4)$$

となる。ただし $\{a\}_+ = \max\{a, 0\}$ である。もし $\tau^*>0$ ならば，企業はいま投資を実行するよりも実行遅延を選択していることになる[2)]。他方，もし $\tau^*=0$ の場合には，投資実行の臨界値は，

$$V_N^* = \frac{r}{r-\mu} I \qquad (5)$$

となる。(5)式から期待収益率 $\mu \in R_{++}$ が増大するにつれ，投資の臨界値は増大することを確認できる。また，企業のプロジェクト価値 $F_N(V)$ の水準は，

$$F_N(V) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu I}{(r-\mu)}\right)\left(\dfrac{(r-\mu)V}{rI}\right)^{\frac{r}{\mu}} & \text{for } V \leq V_N^* \\ V - I & \text{for } V > V_N^* \end{cases} \qquad (6)$$

1)　この仮定についてのさらなる詳細は，Dixit and Pindyck [1994] を参照されたい。

2)　企業が投資実行を遅延する理由は，現在価値の観点から投資費用がにより時間とともに減少するが，収益がにより比較的小さい水準で時間とともに減少するからである。

となる。これらの不確実性がない場合の臨界値と価値をベンチマークとして，次節では不確実性を導入し，不確実性がある場合の臨界値と価値と比較する。

2 不確実性がある場合のプロジェクト価値

本節では，企業が不確実性に直面する場合を考えよう。すなわち(1)式におけるボラティリティが正の値をとる（$\sigma \in R_{++}$）と仮定する。このように不確実性を考慮にいれるモデルでは，投資実行の時刻 τ を決定することはできないが，臨界値 V^* および企業のプロジェクト価値 $F(V)$ は，前節と同様にして求めることができる。企業のプロジェクト価値は，ベルマン方程式（the Bellman Equation）を用いて，

$$F(V_t) = \max\{\mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-rdt}F(V_{t+dt})],\ V_t - I\} \tag{7}$$

と表すことができる。ただし $\mathrm{E}_t[\cdot] = \mathrm{E}[\cdot|\mathfrak{F}_t]$ は時刻 t での条件つき期待値を表す。(7)式右辺の第1項は投資を保留した場合，第2項は投資を実行した場合の価値である。また(7)式は変分不等式として以下のように書き換えられる。

$$F(V_t) \geq \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-rdt}F(V_{t+dt})] \tag{8}$$

$$F(V_t) \geq V_t - I \tag{9}$$

ただし不等式どちらか一方は少なくとも等号で成立しなければならない。そこで，企業が投資を保留する場合，企業のプロジェクト価値が満たさなければならない常微分方程式を導出する。企業は保留する場合（続行領域）には，変分不等式(8)式が等号で成立しなければならない。すなわち

$$F(V_t) = (1 - r\mathrm{d}t)\mathrm{E}_t[F(V_t + \mathrm{d}V_t)] \tag{10}$$

が成立しなければならない。ただし $\mathrm{d}V_t = V_{t+\mathrm{d}t} - V_t$ を用いた。企業のプロジェクト価値 $F(V_t)$ に伊藤の公式（Ito's formula）を用いると，

$$\begin{aligned} &F(V_t + \mathrm{d}V_t) - F(V_t) \\ &= F'(V_t)(\mu V_t \mathrm{d}t + \sigma V_t \mathrm{d}z_t) \\ &\quad + \frac{1}{2}F''(V_t)\sigma^2 V_t^2 \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{11}$$

が得られる。(10)式に(11)式を代入すると，企業が投資を保留する場合におけるプロジェクト価値は，

$$\frac{1}{2}F''(V)\sigma^2 V^2 + F'(V)\mu V - rF(V) = 0 \tag{12}$$

という常微分方程式を満たさなければならない。また常微分方程式は次の境界条件

$$F(0) = 0 \tag{13}$$

$$F(V^*) = V^* - I \tag{14}$$

$$F'(V^*) = 1 \tag{15}$$

を満たさなければならない。ただし(13)式は初期条件であり，(14)式はバリュー・マッチング（value matching）条件，(15)式はスムーズ・ペイスティング（smooth pasting）条件とよばれる境界条件である。なお，V^*は不確実性が存在する場合の企業が投資を実行する臨界値を表す。企業のプロジェクト価値が満たさなければならない微分方程式の解は，以下の命題として纏めることができる。

命題 1（Dixit and Pindyck [1994]） 企業が投資を保留するときのオプション価値が満たさなければならない常微分方程式(12)の解は，境界条件(13)(14)(15)式の下で解くと，

$$F(V) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)^{-\beta_1} \frac{I}{\beta_1 - 1}\left(\frac{V}{I}\right)^{\beta_1} \tag{16}$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

where

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

となる。

投資実行の臨界値 V^* については，命題1の証明において $\beta_1 > 1$ が得られていることから

$$\frac{\beta_1}{\beta_1-1} > 1 \tag{17}$$

が成立する。この(17)式は，正味現在価値法における不確実性がない場合と比較して，リアル・オプション・アプローチにおいて不確実性を考慮する場合，投資実行の臨界値は増大することを意味している。なぜならば，正味現在価値法において不確実性を考慮にいれない場合には，投資の意思決定は V と I の大小関係により実行されるからである。

3　不確実性の有無の比較

前節では，不確実性が存在する場合のプロジェクト価値および臨界値を求めた。本節では，不確実性が存在する場合のプロジェクト価値および臨界値が，不確実性が消滅するとき，不確実性が存在しない場合の価値および臨界値にそれぞれ収束することを証明する。

補題 2（Dixit and Pindyck [1994]）不確実性が存在する場合における臨界値は，不確実性がゼロに近づくとき，不確実性が存在しない場合における臨界値に収束する。すなわち，

$$\lim_{\sigma\to 0} V^* = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\beta_1}{\beta_1-1}I = \frac{\frac{r}{\mu}}{\frac{r}{\mu}-1}I = \frac{r}{r-\mu} = V_N^* \tag{18}$$

が得られる。他方，不確実性がゼロに収束する場合，不確実性が存在する場合のプロジェクト価値は，不確実性が存在しない場合のプロジェクト価値に収束する。すなわち，

$$\lim_{\sigma\to 0} F(V) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1)^{\beta_1}I^{\beta_1-1}}V^{\beta_1} = \left(\frac{\mu I}{r-\mu}\right)\left(\frac{(r-\mu)V}{rI}\right)^{\frac{r}{\mu}} = F_N(V) \tag{19}$$

が得られる。

補題2は，不確実性がゼロに収束する場合における価値と臨界値は，不確実性がない場合の価値および臨界値との間に整合性が成立することを意味する。

最後に，不確実性が無限大に増大する場合を考える。あきらかに $\beta_1\to 1$ が成立する。このとき，投資実行の臨界値は $V^*\to\infty$ となり，不確実性が増大すると企業は決して投資実行しないことを意味する。

4　不確実性に対する比較静学

本節では，プロジェクト価値の比較静学について考察する。リアル・オプション・モデルにおける重要な点は，不確実性のプロジェクト価値に対する影響である。本節では，不確実性のプロジェクト価値への影響，および臨界値への影響を考察する。

まず不確実性に対する臨界値への影響については，次の命題として纏めることができる。

命題 3（Dixit and Pindyck [1994]）不確実性であるボラティリティ $\sigma\in R_{++}$ が増大するとき，企業が投資を実行する臨界値 V^* も増大する。すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}V^* = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_1}\left(\frac{\beta_1 I}{\beta_1-1}\right)\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{-I}{(\beta_1-1)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\sigma} > 0 \tag{20}$$

が成立する。

次に企業のプロジェクト価値に関する比較静学を考察する。Dixit and Pindyck [1994] では，不確実性に対するプロジェクト価値への影響について数値計算でのみ考察しているがここでは解析的に証明する。

定理 4　不確実性であるボラティリティ $\sigma\in R_+$ が増大するとき，企業のプロジェクト価値 $F(V)$ も増大する。すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma} = F(V)\left(\log\left(\frac{(\beta_1-1)}{\beta_1}\frac{V}{I}\right)\right)\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}$$

$$=F(V)\cdot\log\left(\frac{V}{V^*}\right)\cdot\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}\geq 0 \qquad (21)$$

が成立する。

定理4は，リアル・オプション・モデルで得られる最も主要な命題である。この命題の含意とは，市場における不確実性が増大するにつれ，企業が投資を保留することにより新しい情報を待つ時間的価値が増大するので，企業のプロジェクト価値が増大することを意味している。

III 平均回帰過程とリアル・オプション分析

本章では，状態変数が幾何ブラウン運動以外の確率過程に従う場合におけるリアル・オプション分析を考察する。具体的には，状態変数である企業のプロジェクト収益の対数が平均回帰過程に従う場合を考察する。

1 企業のプロジェクト価値

本節では，プロジェクトの収益の対数が，平均回帰過程に従う場合のリアル・オプション・モデルを考察する。プロジェクトの収益 V_t は，前節と同様にして状態変数と仮定し，状態変数は完備なフィルターつき確率空間（Ω，$\mathfrak{I}$，$\{\mathfrak{I}\}_{t\geq 0}$, P）上の確率過程 $\{V_t\}$ として定義され，

$$\mathrm{d}V_t=\eta(\bar{V}-V_t)V_t\mathrm{d}t+\sigma V_t\mathrm{d}z_t, \quad V_0=V \qquad (22)$$

と表されると仮定する。ただし，$\eta\in R_+$，$\bar{V}\in R_{++}$，$\sigma\in R_{++}$ は正の定数，$\{z_t\}_{t\geq 0}$ は標準ブラウン運動である。(22)式は，企業のプロジェクト収益の対数が，平均回帰過程に従うことを意味している。幾何ブラウン運動の場合，状態変数の変化率はランダム・ウォークに従うので，確率過程は定常分布を持たない。それに対して(22)式の場合，状態変数の変化率は平均回帰過程に従うので，確率過程は定常分布を持つ，という大きな差異がある点に注意されたい。

前章と同様にして，企業が投資を保留しているとき，企業のプロジェクト価値 $F(V)$ は，次の常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)+\eta V(\bar{V}-V)F'(V) -rF(V)=0 \qquad (23)$$

を満たさなければならない。ただし $r\in R_{++}$ は前節と同様に割引率を表す。なお境界条件は，前章での幾何ブラウン運動のケースと同一の(13)(14)(15)式で表される。

命題5 企業のプロジェクト収益の対数が平均回帰過程に従うと仮定する。このとき，企業の投資機会オプション価値は，初期条件 $F(0)=0$ を考慮すると

$$F(V)=A\times\exp\left\{\frac{\eta}{\sigma^2}V\right\}\times V^{-\frac{\eta\bar{V}}{\sigma^2}} \qquad (24)$$

$$\times \mathrm{W}\left(\frac{\eta\bar{V}}{\sigma^2}, \sqrt{\left(\frac{\eta\bar{V}}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}, \frac{2\eta}{\sigma^2}V\right)$$

where

$$\mathrm{W}(a, b, c) =\mathrm{Whittaker}(a, b, c) =\exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}\times x^{b+\frac{1}{2}} \times \mathrm{H}\left(b-a+\frac{1}{2}, 2b+1, x\right)$$

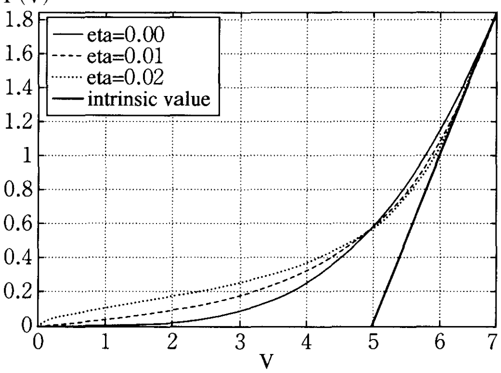
$$\mathrm{H}(c, d, x) =1+\frac{c}{d}x+\frac{1}{2}\frac{c(c+1)}{d(d+1)}x^2 +\frac{1}{6}\frac{c(c+1)(c+2)}{d(d+1)(d+2)}+\cdots$$

となる。A は定数であり，境界条件 $F(V^*)=V^*-I$，$F'(V^*)=1$ を満たすように A，V^* を決める。ここでは，幾何ブラウンの場合とは異なり，A，V^* を解析的に表現することができない。

2 平均回帰過程と幾何ブラウン運動

本節では，状態変数が幾何ブラウン運動とその対数が平均回帰過程にそれぞれ従う場合，確率過程の相違が，企業のプロジェクト価値に及ぼす影響について比較する。この目的のため，本論では，幾何ブラウン運動を $\mu=0$ に特定化

第1図　平均回帰過程と企業のプロジェクト価値1



（$\bar{V}=I=5$，$r=0.05$，$\sigma=0.1$の下でηに対する比較静学）

した幾何ブラウン運動として議論する。これにより，2つの確率過程の相違とは，(22)式で表される平均回帰過程におけるパラメータηが，ゼロか非ゼロかという差異に帰着する。

命題5で示したように，プロジェクト収益の対数が平均回帰過程に従う場合，プロジェクト価値の一般解は，超幾何関数で表現されるが，境界条件を満たす解は解析的に求めることができない。そこで以下では，パラメータ変化における企業のプロジェクト価値および臨界値への影響を数値計算により考察する。パラメータ設定として，まず$r=0.05$，$\sigma=0.10$，$I=5$，$\bar{V}=5$と仮定する。このとき，幾何ブラウン運動$\eta=0.00$の場合と平均回帰過程$\eta=0.01$，$\eta=0.02$の場合を比較する。得られた結果は図1の通りである。収益の対数が平均回帰過程に従う場合，図から理解できるように，企業のプロジェクト価値は原点に対して凸関数となるとは限らない。企業のプロジェクト価値は原点に対して凹関数となる部分をもつ。$V=\bar{V}$では，任意のパラメータηに対して(22)式のドリフトはゼロとなる。それゆえ，任意のパラメータηに対するプロジェクト価値は，$V=\bar{V}=I=5$においては同一水準となる。

命題6　状態変数が(22)式のような確率微分方程式に従う場合，パラメータに依存して，企業のプロジェクト価値は必ずしも凸関数となるとは限らない。

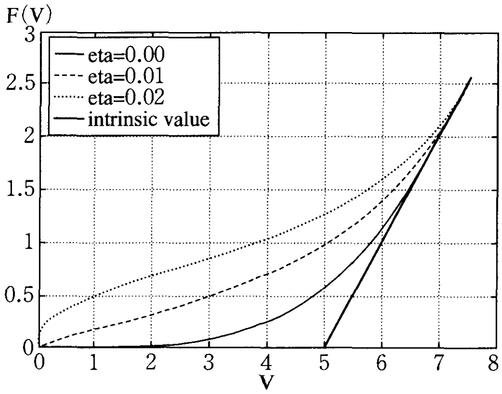
企業のプロジェクト価値は，$V<\bar{V}=I$の場合にはパラメータηに関して増加関数，$V>\bar{V}=I$の場合にはパラメータηに関して減少関数となる。以下ではこの理由について考察しよう。もし$V<\bar{V}$ならば，(22)式のドリフト項は正となり，収益の変化率$\frac{dV}{V}$は増加することになる。こうした状況において，パラメータηが大きくなると，収益の変化率はさらに増大することから，収益の増加により企業のプロジェクト価値も増加する。他方，もし$V>\bar{V}$ならば，(22)式のドリフト項は負となり，上記と全く逆の対応関係が成立する。すなわち，パラメータηが大きくなると，収益の変化率は減少することから，収益の減少により企業のプロジェクト価値も減少する。

上記のパラメータ設定の下では，$V=\bar{V}$では，任意のパラメータηに対して(22)式のドリフトはゼロとなる。それゆえ，任意のパラメータηに対するプロジェクト価値は，$V=\bar{V}=I=5$においては同一水準となる。もし$V<\bar{V}$ならば，(22)式のドリフト項は正となり，収益の変化率$\frac{dV}{V}$は増加する。こうした状況において，パラメータηが大きくなると，収益の変化率はさらに増大することから，収益の増加により企業のプロジェクト価値も増加する。他方，もし$V>\bar{V}$ならば，上記と全く正反対の関係が成立する。こうした現象と初期条件$F(0)=0$により，第1図から明らかなように，企業のプロジェクト価値$F(V)$は，収益Vが相対的小さい水準において凸関数なるとは限らない。

第1図では$\bar{V}=I$のケースを考察した。次に$\bar{V}\neq I$のケースを考えよう。$\bar{V}<I$のケースとしてパラメータ$\bar{V}=4.5$, $I=5$を仮定し，$\bar{V}>I$のケースとしてパラメータ$\bar{V}=5.5$, $I=5$を設定しても第1図と同一の結果が得られる。なお図の掲載は省略する。

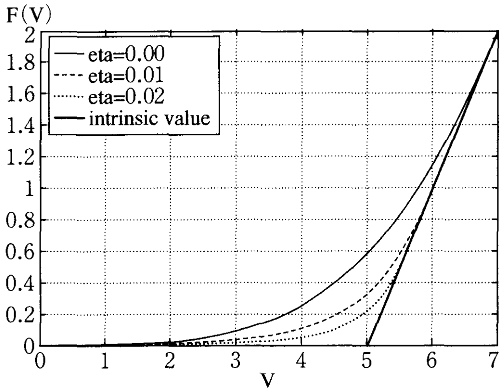
しかしながら，$\bar{V}>I$のケースとして$\bar{V}=7$,

第2図　平均回帰過程と企業のプロジェクト価値2



($\overline{V}=7$, $I=5$, $r=0.05$, $\sigma=0.1$の下で η に対する比較静学)

第3図　平均回帰過程と企業のプロジェクト価値3



($\overline{V}=3$, $I=5$, $r=0.05$, $\sigma=0.1$の下で η に対する比較静学)

$I=5$, $\overline{V}<I$ のケースとして $\overline{V}=3$, $I=5$ とパラメータを設定した場合，それぞれ第2図，第3図のような結果が得られた。すなわち，$\overline{V}$ と I の値の差が大きい場合，それぞれ η に対する企業のプロジェクト価値は，それぞれ交差しない。第2図 ($\overline{V}=7$, $I=5$) では，企業のプロジェクト価値と臨界値は，パラメータ η に対して増大する。すなわち，状態変数が幾何ブラウン運動に従う場合よりも，状態変数の対数が平均回帰過程に従う場合の方が企業のプロジェクト価値および臨界値は増大することとなる。他方，第3図 ($\overline{V}=3$, $I=5$) では，企業のプロジェクト価値と臨界値は，パラメータ η に対して減少する。これは，状態変数の対数が平均回帰過程に従う場合よりも，状態変数が幾何ブラウン運動に従う場合の方が，企業のプロジェクト価値と臨界値は増大すること意味している。こうした結果は次の命題として纏めることができる。

命題 7　企業のプロジェクト収益の対数が平均回帰過程に従う場合と，収益が $\mu=0$ における幾何ブラウン運動に従う場合を比較すると，企業のプロジェクト価値および臨界値の大小関係はパラメータに依存する。

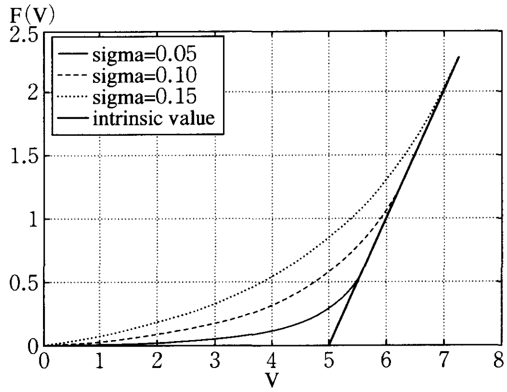
第2図におけるパラメータの下では，(22)式で $\eta=0$ に対応する幾何ブラウン運動のケースよりも，(22)式で $\eta>0$ に対応する平均回帰過程のケースの方が，企業のプロジェクト価値および臨界値は増大する。他方，第3図におけるパラメータの下では，上記と全く正反対の関係が成立する。

3　ボラティリティに対する比較静学

前章での幾何ブラウン運動において，不確実性が増大すると企業のプロジェクト価値も増大する，という命題を解析的に証明した。本節では，収益の対数が平均回帰過程に従う場合，前章と同一のボラティリティに対する比較静学を数値計算から考察する。

ボラティリティに対する企業のプロジェクト価値の単調性は，リアル・オプション分析において最も重要な命題の一つであり，解析的に証明されている。Alveretz and Stenbacka [2001] では，確率微分方程式におけるドリフトおよび収益関数が状態変数に対して凸性をみたす場合，企業のプロジェクト価値は初期状態に対して凸関数となり，かつボラティリティに関して増加関数となることが証明されている。また，Kijima and Shibata [2002] では，ドリフトが状態変数に対して線型の場合でも，収益関数が状態変数に関して凸性をみたすならば，上記と同一の結果が得られることをカップリング（cou-

第4図　平均回帰過程と企業のプロジェクト価値4



（$\bar{V}=I=5$，$r=0.05$，$\eta=0.01$の下で σ に対する比較静学）

pling）の議論を用いて簡潔に証明している。そして，Kijima [2002] では，金融オプションの初期状態に関する凸性に関して考察し，配当がある場合には初期状態に関してオプション価値が凸関数にはならないことが証明されている。

収益の対数が平均回帰過程に従う場合，ドリフトは状態変数に対して凹関数となるので，企業価値は初期状態に関して凸関数になるとは限らない（第2図）。この結果，企業価値のボラティリティに関する単調性は，解析的な先行研究からは結論づけることができない。

こうした点を踏まえて，本節では，企業価値が初期状態に対して凸関数とはならない場合，企業価値がボラティリティに対してどのような影響をうけるかについて考察する。なおパラメータは，それぞれ $\sigma=0.0$, $\sigma=0.1$, $\sigma=0.2$ と設定する。得られた結果は第4図に示される通りである。つまり，ボラティリティが増大すると企業のプロジェクト価値および臨界値も増大することを第4図は意味している。すなわち，既存研究によれば，ドリフトが状態変数に対して凸関数ではない場合，ボラティリティに関する企業価値の単調性について解析的に証明することはできない。しかしながら，第4図の数値計算によれば，ドリフトが状態変数に対して凸関数ではない場合でも，ボラティリティに関する企業価値の単調性が示される。

IV　おわりに

リアル・オプション分析では，状態変数が幾何ブラウン運動に従うと仮定される場合が多い。それに対して本論では，状態変数が平均回帰過程に従うと仮定し，リアル・オプション・モデルの構築と，幾何ブラウン運動に従うモデルとの比較検討を行った。現実のプロジェクト価値を評価するとき，状態変数は産業あるいは需要などに応じて様々な確率過程に従うと考えられる。こうした理由から，リアル・オプション・モデルにおいても，状態変数を幾何ブラウン運動以外のモデルで構築することが必要とされていた。それゆえ，本論のような分析は，現実のプロジェクト評価に対してリアル・オプション・モデルの適用範囲を広げることを可能にし，リアル・オプション分析のさらなる発展に貢献していると考えられる。

リアル・オプション分析は，近年急速に進められた新しいプロジェクト評価法であり，上記のように理論の体系化は十分であるとは言えない。さらなる理論の精緻化が必要とされている。今後の研究課題としては，このようなリアル・オプション理論の精緻化について考察していきたい。

V　付　録（証明）

命題1の証明　企業のプロジェクト価値 $F(V)$ の閉じた解を導出する。(12)式における2階の常微分方程式の一般解は

$$F(V)=A_1V^{\beta_1}+A_2V^{\beta_2}$$

と表される。ただし $\beta_1>0$，$\beta_2<0$ である。境界条件(13)式から $A_2=0$ が成立しなければならないので，常微分方程式の解は，

$$F(V)=A_1V^{\beta_1} \qquad (\mathrm{A}\ 1)$$

と書き換えることができる。また境界条件(14)と(15)式を解けば，

$$V^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}I \qquad (\mathrm{A}\ 2)$$

$$A_1=\frac{V^*-I}{(V^*)^{\beta_1}}=\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1)^{\beta_1}I^{\beta_1-1}} \qquad (\mathrm{A}\ 3)$$

が得られる。ただし（A 2）式は最適な投資実行の臨

界値，(A 3)式は常微分方程式の解の係数を表す。(A 1)式の1階微分，2階微分を，(12)式に代入すると，

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\mu\beta-r=0$$

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}>1 \qquad \text{(A 4)}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}<0$$

が得られる。β_1，β_2 は(A 4)式の解である。また $\beta_1>1$ と $\beta_2<0$ の符号条件は，

$$Q(\beta):=\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\beta-r=0$$

と定義すれば，$Q(1)=-(r-\mu)$，$Q(0)=-r$ が成立することから確認できる。ここで，後の議論で使用するように，$\beta_1>1$ から $\dfrac{\beta_1}{\beta_1-1}>1$ が成立する点に注意されたい。

補題2の証明　補題4の証明のため，関数 β_1 の収束から考える。仮定 $\mu\in R_{++}$ により，$\sigma\in R_+$ をゼロに近づけると β_1 は不定形となる。関数 β_1 の分子を $\mathrm{n}[\beta_1]$，分母を $\mathrm{d}[\beta_1]$，すなわち $\beta_1(\sigma):=\dfrac{\mathrm{n}[\beta_1(\sigma)]}{\mathrm{d}[\beta_1(\sigma)]}$ と定義し，ロピタールの定理を適用すると，

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to0}\beta_1(\sigma)&=\lim_{\sigma\to0}\frac{\mathrm{n}[\beta_1(\sigma)]}{\mathrm{d}[\beta_1(\sigma)]}=\lim_{\sigma\to0}\frac{\mathrm{n}[\beta_1'(\sigma)]}{\mathrm{d}[\beta_1'(\sigma)]}\\&=\lim_{\sigma\to0}\frac{\mathrm{n}[\beta_1''(\sigma)]}{\mathrm{d}[\beta_1''(\sigma)]}\\&=\lim_{\sigma\to0}\frac{1+(-1)\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+2\sigma^2r\right]^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}\sigma^2-\mu\sigma+2\sigma r\right]^2}{2}\\&\quad+\lim_{\sigma\to0}\frac{\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+2\sigma^2r\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\sigma^2-\mu\sigma+2\sigma r\right]}{2}\\&=\frac{\left[1-\frac{\mu}{\mu}+\frac{2r}{\mu}\right]}{2}=\frac{r}{\mu}\end{aligned} \qquad \text{(A 5)}$$

が導出される。(A 5)式を用いると，臨界値の係数 $\dfrac{\beta_1}{\beta_1-1}$ は

$$\lim_{\sigma\to0}\frac{\beta_1}{\beta_1-1}=\frac{\frac{r}{\mu}}{\frac{r}{\mu}-\frac{\mu}{\mu}}=\frac{r}{r-\mu} \qquad \text{(A 6)}$$

に収束する。(A 6)式を用いることにより，不確実性の有無における，価値と臨界値の整合性が証明される。

命題3の証明　不確実性の臨界値に対する効果を証明するため，

$$Q:=\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1(\beta_1-1)+\mu\beta_1-r \qquad \text{(A 7)}$$

を定義し，$Q(\beta)$ を σ について微分すると，

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}+\frac{\partial Q}{\partial\sigma}=0 \qquad \text{(A 8)}$$

となる。明らかに $\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_1}>0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma}>0$ が成立するので，$\dfrac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}<0$ が成立しなければならない。すなわち，ボラティリティ σ が増大すると関数 β_1 が減少することを確認できる。また，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_1}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\right)=\frac{-1}{(\beta_1-1)^2}<0 \qquad \text{(A 9)}$$

が得られる。以上の結果から(20)式が正となる。すなわち，不確実性が増大するとき，臨界値も増大することを証明できる。

定理4の証明　不確実性が増大するとプロジェクト価値も増大すること，つまり

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{\beta_1^{\beta_1}I^{\beta_1-1}}V^{\beta_1}\right)=\frac{\partial F}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}\geq0 \qquad \text{(A 10)}$$

となることを解析的に証明する。(A 10)式最右辺の第2項の $\dfrac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}$ は，非正であることをすでに証明している。それゆえ，ここでは右辺第1項の $\dfrac{\partial F}{\partial\beta_1}$ も，非正であることを証明すれば十分である。以下では符合条件 $\dfrac{\partial F}{\partial\beta_1}\leq0$ を証明する。(A10)式の $F(V)=\dfrac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{\beta_1^{\beta_1}I^{\beta_1-1}}V^{\beta_1}$ を書き直すと，

$$\begin{aligned}\log F(V)=&(\beta_1-1)[\log(\beta_1-1)-\log I]\\&+\beta_1\log V-\beta_1\log\beta_1\end{aligned} \qquad \text{(A 11)}$$

と表され，β_1 で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log F}{\partial\beta_1}&=\log(\beta_1-1)+\log\frac{V}{I}+\frac{\beta_1-1}{\beta_1-1}\\&\quad-\log\beta_1-\frac{\beta_1}{\beta_1}\\&=\log\left(\frac{V(\beta_1-1)}{\beta_1 I}\right)\end{aligned} \qquad \text{(A 12)}$$

が得られる。(A12)式を書き換えると，

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_1}=F(V)\left(\log\left(\frac{(\beta_1-1)}{\beta_1}\frac{V}{I}\right)\right)$$

$$=F(V)\log\left(\frac{V}{V^*}\right) \qquad \text{(A13)}$$

となる。ただし $V^*=\dfrac{\beta_1 I}{(\beta_1-1)}$ を用いた。(A13)式の符号条件は，境界条件より $F(V)\geq 0$, $V<V^*$ より $\log\left(\dfrac{V}{V^*}\right)<0$ が成立するので，結局 $\dfrac{\partial F}{\partial \beta_1}\leq 0$ が導出される。すなわち(A10)式より，不確実性であるボラティリティ $\sigma\in R_+$ が増大するとき，企業のプロジェクト価値も増大することが証明される。

命題5の証明　(23)式の微分方程式は(24)式のように解けることが知られている。証明は西本［1998］を参照されたい。

参考文献

Alvarez, Luis H. R. and Rune Stenbacka [2001] "Adoption of Uncertain Multi-stage Technology Projects : A Real Option Approach," *Journal of Mathematical Economics,* Vol. 35, pp. 71-97.

Dixit, Avinash K. and Robert S. Pindyck [1994] *Investment Under Uncertainty,* Princeton University Press.

Kijima, Masaaki [2002] "Monotonicity and Convexity of Option Prices Revisited," *Mathematical Finance,* Vol. 12, no. 4, pp. 411-426.

Kijima, Masaaki and Takashi Shibata [2002] "Real Options in a Duopoly Market with General Volatility Structure," *Kyoto University Discussion Paper,* No. 64.

西本敏彦［1998］『超幾何・合流型超幾何微分方程式』共立出版。